قسم الإحصاء

المرحلة الرابعة / اتخاذ القرارات

المحاضرة الاولى: الفصل الاول

عملية اتخاذ القرار Making process Decision

مقدمة : Introduction

تعتبر نظرية القرارات الإحصائية من المواضيع المهمة خاصةً بعد التطور الكبير الذي حصل في مجال الادارة . حيث أصبح المدير الإداري أو متخذ القرار لا يعتمد على الخبرة التي اكتسبها من سنوات عمله فحسب عند اتخاذه لقرارا معين وانما اصبح يعتمد كذلك على اساليب احصائية علمية متطورة تعرف بنظرية القرارات .

نحن ودرسنا سابقاً ان المراحل التي تمر على متخذ القرار هي :-

١- تحديد المشكلة ثم وضع الانموذج المناسب لها .

٢- ثم صياغة الفرضيات الخاصة بها .

٣- جمع البيانات والمعلومات المتعلقة بالمشكلة قيد البحث

٤ ـ تصنيف وتبويب البيانات ووضعها في جداول تكرارية معينة وحساب بعض المؤشرات الإحصائية

.٥ ـ والمرحلة الأخيرة هي اتخاذ القرار الذي هو النتيجة النهائية لجميع تلك المراحل

فإذا كان القرار صائباً انعكس ذلك بشكل ايجابي على المؤسسة الإنتاجية أو الخدمية أما إذا كان القرار غير مناسب انعكس ذلك سلباً على هذه المؤسسة .

ان عملية اتخاذ القرار Decision Making process تتألف من نقطتين اساسيتين هما :-

١ – مجموعة القرارات (Decision) المتوفرة والتي يمكن اعتمادها من قبل متخذ القرار .

٢ – مجموعة المواقف (outcomes) أو الظروف التي ترافق عملية اتخاذ القرار والتي تسمى بحالات الطبيعة (states of **nature**) وهي تحدث غالباً بالضد من رغباتنا ولا يمكن السيطرة عليها . بمعنى لا تعتمد على القرار الذي نتخذه في مسألة معينة مثل حالة الجو ممطر أو غير ممطر، سعر سلعة معينة خلال فترة زمنية محددة وغير ذلك من الظواهر التي يمكن ان ترافق عملية اتخاذ القرار . أما التبعات الناجمة عن عملية اتخاذ القرار فهي نوعان :-

ا ـ بعض التبعات من السهولة تحديدها وقياسها مثل ربح أو خسارة مبلغ معين من المال .

ب - البعض الأخر يصعب تحديدها وقياسها مثل التبعات المعنوية والتبعات الاجتماعية والتبعات النفسية .

تلك التبعات في (أ) يمكن قياسها كميا بشكل رقمي يمكن ان نطلق عليها مصطلح المنفعة (Utility) او الخسارة (Loss) علماً ان المصطلحين يؤديان نفس الغرض ولكن هدف متخذ القرار سيكون أما تعظيم الارباح او تقليل الخسائر والكلف .

مفهوم نظرية اتخاذ القرارات concept of Decision making theory :-

Definition :عملية اتخاذ القرار :- هي مباراة ومبارزة وسباق بين متخذ القرار Decision Maker وخصم مقابل غير تقليدي هي الطبيعة Nature .حيث أن الطبيعة تختار لها حالة معينة ويقوم متخذ القرار باتخاذ قرار معين دون علم مسبقاً بتلك الحالة . وهنا متخذ القرار يكون أمام حالتين هما:

١- اذا كان متخذ القرار على علم مسبق بحالة الطبيعة فأن عملية اتخاذ القرار الملائم سوف تتم بطريقة سهلة وغير معقدة وهنا لا وجود ولا حاجة لنظرية القرارات لاستخدامها للوصول إلى القرار الصائب.

٢- أما عندما تكون حالة الطبيعة غير معلومة ومجهولة مثل نتيجة فريق معين لكرة القدم (فوز ، تعادل ، خسارة) أو حالة الطقس (جيد، رديء) وغيرها من الحالات التي يمكن ان تعتمد في اتخاذ قرار معين فلا يمكن التنبؤ بحدوثها بدون الاستعانة بالنظرية الإحصائية ونظرية القرارات .

إن بيئة اتخاذ القرار تتكون من ثلاثة انواع :- Three kinds

.

I. **النوع الأول : عملية اتخاذ القرار في حالة اليقين أو التأكد**

Decision Making under certainty: اي ان متخذ القرار يعلم بشكل مؤكد حالة الطبيعة ، وبناءا على ذلك فان متخذ القرار يتحمل كل مخاطر وعواقب نتيجة القرار الذي سيتخذه .

II. **النوع الثاني : عملية اتخاذ القرار في حالة عدم اليقين**

Decision making under uncertainty :في هذه الحالة لا يمتلك متخذ القرار اي معلومات إطلاقا عن احتمالات حدوث حالة الطبيعة المختلفة . لذا فأنه سيلجأ إلى استخدام معايير رياضية تساعده على اتخاذ القرار على سبيل المثال الحد الأدنى للحد الأعلى للخسارة Minimax criterion .

أما في حالة التبعات الناجمة عن منافع آو أرباح فيستخدم معيار الحد الأعلى للحد الأدنى للمنفعة Maximin criterion.

III. **النوع الثالث : عملية اتخاذ القرار في حالة المخاطرة**

Decision making under Risk: في بيئة اتخاذ القرار من هذا النوع يمتلك متخذ القرار معلومات تتعلق باحتمالات حدوث حالات الطبيعة أو التوزيع الاحتمالي لحالة الطبيعة .

عناصر عملية اتخاذ القرار Decision making framework إن اطار عملية اتخاذ القرار تتألف من عناصر أساسية تحدد قبل البدء بعملية اتخاذ القرار وهذه العناصر هي :-

١- حالات الطبيعة states of nature

هي جميع الحالات أو القوى التي يمكن أن تحدث أو تظهر في مسألة معينة ولا يمكن السيطرة عليها (اي لا تعتمد على القرار الذي نتخذه) مثل:

الطقس (رديء ممطر أو جيد مشمس)

نتيجة فريق بكرة الطائرة (فوز او خسارة)

قيمة سيارة معينة خلال فترة زمنية (ترتفع او تنخفض)

الظروف الاقتصادية لبلد ما (متدنية ، مستقرة ، عالية)

وسنرمز لحالة الطبيعة بالحرف $\O$ (ثيتا). وحالة الطبيعة كمتغير تكون على نوعين:

- عندما تكون حالات الطبيعة متقطعة (منفصلة) نرمز لها بالشكل $\O_1, \O_2, \ldots, \O_n$ حيث $n \geq 2$ وان n عدد طبيعي اكبر أو يساوي ٢ لان عملية اتخاذ القرار لا تعمل وليس لها معنى عند وجود حالة طبيعية واحدة وعدة بدائل لاتخاذ القرار .

مثال على حالات الطبيعة المتقطعة: نتيجة فريق كرة القدم خاض مباراة معينة سنرمز للخسارة Ø١ وللتعادل Ø٢ والفوز Ø٣ ، بمعنى أخر توجد هنا ثلاث حالات طبيعة

- أما عندما تكون حالات الطبيعة متصلة (مستمرة) فنستخدم الفترات للتعبير عن ذلك مثل ١<Ø<٠ أو ∞<Ø< ٠مثال ذلك الأوزان المختلفة لقالب من الثلج او قلم رصاص أو كمية السكر في دم احد مرضى السكر خلال فترة زمنية محددة .

٢ – القرارات Decisions :-

هي البدائل المتاحة والاتجاهات والآراء المتوفرة لدى متخذ القرار لمسألة معينة وتسمى القرارات . حيث بعد الانتهاء من عملية تعيين حالات الطبيعة في مسألة معينة نقوم بعد ذلك بتحديد القرارات المزمع اتخاذها في تلك المسألة والتي يجب ان تعطي اكبر منفعة أو اقل خسارة ممكنة .

والقرار كمتغير عشوائي نرمز له بالرمز d حيث ممكن أن يكون منفصل أو متصل.

فعندما تكون القرارات منفصلة (متقطعة) نرمز لها بالشكل d1,d2,….dm حيث m≥٢ حيث m عدد طبيعي اكبر من اثنين لان عملية اتخاذ القرار تكون بلا معنى في حالة وجود أكثر من حالة للطبيعة وبديل واحد لاتخاذ القرار . مثل قرار شراء أو عدم شراء عقار.

أما عندما تكون القرارات متصلة (مستمرة) فنستخدم الفترات للتعبير عن ذلك مثل ٢>d<١ أو ٠≤ d.

ومثال لذلك :القرار الذي نتخذه حول المسار الزمني لسعر سلعة معينة خلال فترة زمنية قادمة .

دالة القيمة Worth function :-

لو اتخذنا قرار d في مسألة معينة وتختار الطبيعة الحالة Ø فأننا نحصل على نتيجة معينة لها قيمة ولتكن الدالة (W (di ،Øj والتي تعبر عن هذه القيمة لكل قرار d لكل حالات الطبيعة Ø. هذه القيمة قد تكون على سبيل المثال ربح معركة عسكرية أو خسارتها ، موت أو شفاء مريض ، ربح مبلغ معين أو خسارة مبلغ معين ، نجاح أو رسوب طالب دراسات عليا في امتحان الكفاءة .هذه القيمة قد تكون ربح (Utility) أو خسارة (Loss)

جدول المنفعة والخسارة utility table and loss table

يمكن تمثيل مسألة اتخاذ القرار بجدول أو مصفوفة حيث أن كل عمود يمثل حالة من حالات الطبيعة Ø1,Ø2,….Øn بينما كل صف يمثل قرار من القرارات d1,d2,….dm حيث ان :

i=1,……m

j=1,….n.

جدول المنفعة لمسألة معينة

Øj / di	Ø١	Ø٢	---	Øj	----	Øn
d1	U11	U12	---	U1j	---	U1n
d2	U21	U22	---	U2j	----	U2n
---	---	---		---		---
di	Ui1	Ui2	---	Uij	----	Uin
---	---	---	---	---	----	---
dm	Um1	Um2	---	Umj	----	Umn

وهي مسألة اتخاذ قرار من المرتبة mxn حيث انه $U_{ij}=U(d_i ، Ø_j)$ هو قيمة في جدول منفعة

وبنفس الطريقة يمكن تكوين جدول الخسارة من الجدول أعلاه باستبدال L_{ij} بدلا من U_{ij} حيث أن $L_{ij}=L(d_i ،Ø_j)$ هو قيمة معينة في جدول خسارة

المحاضرة الثانية :

دوال المنفعة المعيارية وجداول المنفعة المعيارية

أن العلاقة النسبية بين وحدات القياس مثل (دينار ، كغم .....) هو الشيء المهم في جدول القيمة وليست القيمة المطلقة، لذلك إذا كانت هناك امكانية لتبسيط الجدول بحيث نجعل اقل قيمة مساوية الى الصفر والفرق بين الوحدات على شكل اعداد صحيحة ، عند ئذ تسمى هذه الوحدات بدوال المنفعة المعيارية $U(d_i ،Ø_j)$ أما جدولها فيسمى بجدول المنفعة المعيارية ولا يوجد فرق بين الجدولين عدا أن جدول المنفعة المعيارية يكون أكثر تبسيطاً وسهولة في أجراء العمليات الحسابية التي تتطلبها عملية اتخاذ القرار كونه يحوي أرقام صغيرة .

مثال(١) : أحدى الشركات تمتلك منتجعا ولأغراض الدعاية أعلنت الشركة أن حجز غرفة واحدة في المنتجع يكلف الزبون(٩٠) دولار في حالة كون الطقس جيد وغير ممطر وبدون مقابل في حالة الطقس سيء وممطر. أرادت الشركة أن تؤمن ضد المطر لدى أحدى شركات التامين وكانت الكلفة للزبون الواحد ضد المطر (٤٠) دولار تدفعها الشركة السياحية إلى شركة التامين ، ولكن في حالة حدوث مطر فان شركة التامين تقدم تعويضا للشركة السياحية مقداره(٦٠) دولار عن كل غرفة شاغرة ، فإذا علمت أن هناك مصاريف ثابتة(ماء وكهرباء......) مقدارها (٥) دولار لكل غرفة . المطلوب : وصف حالات الطبيعة وتكوين جدول المنفعة أولا ثم إيجاد جدول المنفعة المعياري؟

الحل:	<u>حالات الطبيعة</u>	<u>ألقرارات</u>
نفرض	ϕ_1 الجو جيد(غير ممطر)	d_1 تؤمن الشركة
	ϕ_2 الجو غير جيد (ممطر)	d_2 لا تؤمن الشركة

$$U(d1,\theta1)=90-40=50\ \ -5\ \ =\ \$\ ٤٥$$

$$U(d1,\theta2)=60-40-5=\$15$$

$$U(d2,\theta1)=90-5=\$85$$

$$\bigcup(d2,\theta2)=0-5=\$-5$$

∴ جدول المنفعة يكون

Θj / di	Θ١ الجو جيد	Θ٢ الجو ردئ
يؤمن d1	٤٥	١٥
لايؤمن d 2	٨٥	٥-

يتم تحويله الى جدول منفعة معياري بالقسمة على ٥ واضافة العدد (١) يكون

بالقسمة على ٢

	Θ١	Θ٢
d1	٥	٢
d2	٩	٠

	Θ١	Θ٢
d1	١٠	٤
d2	١٨	٠

م

الحاضرة الثالثة:

الفصل الثاني

عملية اتخاذ القرار في حالة عدم اليقين Decision Making Under Uncertainly وهي تلك المعايير والمقاييس المعروفة والشائعة والمستخدمة من قبل متخذي القرار لتساعدهم في اتخاذ القرار لمسألة معينة تحت ظروف عدم التأكد وهي :-

١- معيار الحد الادنى للحد الاعلى للخسارة Minimax Criterion والذي يقابله معيار الحد متشائم . ففي جدول الخسارة كان (Minimax) دائماً يعطينا اكبر خسارة ومن جدول يعطينا (Maximini) اقل ربح ممكن .
٢- معيار الحد الادنى للحد الادنى للخسارة (Minimin Criterion) والذي يقابله الحد الاعلى للحد الاعلى للمنفعة (Maximax Criterion) يتصف هاذين المعيارين كون لهما اتجاه تفائلي كون معيار Minimax يعطينا من جدول الخسارة اقل الخسائر وان معيار Maximax يعطينا من جدول المنفعة اكبر ربح .
٣- معيار لا بلاس Lablas Criterion يمتاز هذا المعيار بكونه ان احتمالات ظهور حالات الطبيعة تكون متساوية Equally likely ولا افضلية لحالة على اخرى .
٤- معيار هروز Hurwiez Criterion يعتمد هذا المعيار على معامل التفائل ونرمز له بالرمز α وتكون قيمة معامل التفائل محصورة بين الصفر والواحد $0<\alpha<1$
٥- معيار الاسف Regret Criterion باستخدام هذا المعيار يجب تكوين جدول الاسف اولاً ثم نستخدم المعيارين : اما Minimax لجدول الخسارة او Maxmini لجدول المنفعة .

٦- تعشية القرارات Randomize Decisions ان هذا المعيار يعتمد على حقيقة واحدة هي بما ان الطبيعة تعتبر هي الخصم لمتخذي القرار لذا فان متخذ القرار يحاول ان يمنع حالة الطبيعة من معرفة القرار الذي سوف يتخذه .

٧- القرارات الغير معتمدة Inadmissible decisions وهو الاسلوب المستخدم لرفض واستبعاد بعض من القرارات الغير مهمة وشطبها بحيث يكون متخذ القرار على قناعة تامة بانه لا يلجأ الى هذا القرار كونه يعظم خسارته او يقلل ربحه .

مثال (٢) لدينا جدول الخسارة المعياري الاتي

اوجد قرار الحد الادنى والحد الاعلى للخسارة Minimax

	ϴ١	ϴ٢	ϴ٣
d1	١٠	٤	١
d2	٣	٢	٨
d3	٠	١	١٣
d4	٥	١١	٢

الحل نعيد كتابة الجدول ونضيف اليه عمود جديد يتضمن اكبر خسارة لكل قرار

	ϴ١	ϴ٢	ϴ٣	Max L(d,ϴ)
d1	١٠	٤	١	١٠
d2	٣	٢	٨	٨
d3	٠	١	١٣	١٣
d4	٥	١١	٢	١١

Minimax L(di ،Øj) = 8

∴ افضل قرار حسب معيار الحد الادنى للحد الاعلى للخسارة هو القرار d2

مثال (٣) لدينا جدول المنفعة المعياري الاتي اوجد قرار الحد الاعلى للحد الادنى للمنفعة Maximin

	ϴ١	ϴ٢	ϴ٣
d1	٧	-1	٣
d2	٨	٠	٢
d3	٤	٢	٥
d4	١	٧	٤

الحل نعيد كتابة الجدول ويضاف اليه عمود جديد يتضمن اقل منفعة لكل قرار

	Θ١	Θ٢	Θ٣	Min L(d,Θ)
d1	7	-1	3	-1
d2	٨	٠	٢	٠
d3	٤	٢	٥	٢
d4	١	٧	٤	١

$\therefore$ Max min U(d,Θ)=2

$\therefore$ افضل قرار حسب معيار الحد الاعلى للحد الادنى للمنفعة هو القرار الثالث d3

مثال ٤ لو كان لدينا الدوال التالية :- اوجد القرار الامثل باستعمال معيار الحد الادنى للحد الاعلى للخسارة علمً ان 10<Θ<20

(١) $L(d1,\Theta)=8+\frac{\theta-30}{6}$

(٢) $L(d2,\Theta)=\Theta+٢٠$

(٣) $L(d3,\Theta)=8-\frac{(\theta-20)^2}{10}$

الحل

(١) $L(d1,10)=8+\frac{10-30}{6}=8-3.3=5.3$

$L(d1,20)=8+\frac{20-30}{6}=8-1.6=6.4$

(٢) L(d2,10)=10+20=٣٠

L(d2,10)=20+20=٤٠

(٣) $\partial L(d3,\Theta)/\partial\theta=\frac{\theta-20}{5}$

نساوي المشتقة بالصفر للحصول على قيمة Θ

Θ=٢٠

ولمعرفة هل ان قيمة ϴ تمثل قيمة عظمى او صغرى لذا نأخذ المشتقة الثانية كما يلي :

$^2ϴ\ L(d3,ϴ)/ϴϴ3= -\frac{1}{5} <0$

بما ان المشتقة الثانية سالبة لذا فان القيمة القصوى هي قيمة عظمى وهي المطلوبة

$L(d2,20)=8-\frac{20-20}{10}$ = ٨

الان نقوم باختبار ادنى عائد لكل قرار

Max L(d1,ϴ)= max ϴ(5.3, 6.4)= 6.4

Max L(d2,ϴ)= max ϴ (+30,40)=40

Max L(d3,ϴ)=8

Minmax L(d,ϴ)= Min d(6.4,40,8)= 6.4

اذن القرار الاول هو افضل قرار(d1)

ملاحظة (١) اذا طلب بالسؤال حساب(Minimax) لجدول منفعة فلا يجوز ذلك

معيار Minimax يحسب فقط جدول الخسارة

ملاحظة(٢) اذا طلب بالسؤال حساب maxmini لجدول الخسارة فلا يجوز ذلك لان معيار **Maximin** **يحتسب (يستخدم) فقط لجدول المنفعة**

<u>المحاضرة الرابعة:</u>

مثال(٥) لدينا جدول الخسارة المعياري الاتي :

اوجد قرار لا بلاس

	ϴ١	ϴ٢	ϴ٣
d1	2	6	4
d2	14	٠	10
d3	3	1	2
d4	5	2	11

الحل نحسب التوقعات لكل قرار بأعتبار لدينا ثلاث حالات طبيعة احتمالاتها تكون متساوية = $\frac{1}{3}$

Ed1 L = $2(\frac{1}{3})+$ ٦$(\frac{1}{3})+$ ٤$(\frac{1}{3})=\frac{26}{3}$

$Ed2\ L = 14(\frac{1}{3}) + 0(\frac{1}{3}) + 10(\frac{1}{3}) = \frac{24}{3}$

$Ed3\ L = 5(\frac{1}{3}) + 2(\frac{1}{3}) + ١١(\frac{1}{3}) = \frac{18}{3}$

بما ان اقل خسارة متوقعة تقابل d3 لذا فان قرار لا بلاس هو القرار الثالث d3

مثال ٦ لنفس بيانات مثال (٥) لو كان لدينا نفس الجدول المعياري للمنفعة والمطلوب حسب قرار لا بلاس

الحل نحسب التوقعات لكل قرار وبالتالي فأن

بما ان اكبر التوقعات للربح هي تقابل القرار d1 لذا فانه قرار لا بلاس

مثال٧ لنفس بيانات مثال (٤) لو كان لدينا نفس دوال المنفعة اوجد افضل قرار باستعمال لا بلاس

الحل بما ان معيار لا بلاس يفترض ان جميع الاحتمالات لحالات الطبيعة متساوية لذا فإننا نعتقد ان التوزيع المنتظم للمتغير المستمر يعتبر ملائماً لحل هذه المسألة

نبحث عن القرار الذي يعطينا اكبر منفعة نجده القرار الثاني *d2* حسب لا بلاس

مثال ٨ لجدول الخسارة الاتي اوجد قرار هروز اذا علمت ان α=٠,٤

	ϴ١	ϴ٢	ϴ٣
d1	30	40	10
d2	70	20	100
d3	10	80	50

الحل اول خطوة نحول الجدول الى معياري بالقسمة على ١٠ وطرح العدد (١) ويكون

	ϴ١	ϴ٢	ϴ٣
d1	٢	٣	٠
d2	٦	١	٩
d3	٠	٧	٤

Ed1L= 0(0.4)+3(0.6)= 1.8

Ed2L=1(0.4)+9(0.6)=5.8

Ed3L=0(0.4)+7(0.6)=4.2

ثم نختار اقل توقع الذي يقلل الخسارة ويكون d1

مثال ٩ لجدول المنفعة التالي اوجد قرار هروز باستخدام نفس جدول مثال ٨

هنا اعلى قيمة ٠,٤ واقل قيمة نعطيها ٠,٦

Ed1U=3(0.4)+0(0.6)= 1.2

Ed2U= 9(0.4)+1(0.6)=4.2

Ed3U=7(0.4) +0(0.6)=2.8

اذن افضل قرار هو الذي يعطيني اعلى ربح وهو d2

مثال ١٠ لجدول الخسارة في مثال ٨ اوجد افضل قرار باستخدام معيار الاسف

الحل نحول الجدول الى معياري كما وجدناه في مثال ٨ ثم نتبع الخطوات التالية:

١- تكون جدول الاسف بطرح كل قيمة في كل عمود من اكبر قيمة في العمود

	Θ١	Θ٢	Θ٣
d1	٢	٣	٠
d2	٦	١	٩
d3	٠	٧	٤

	Θ١	Θ٢	Θ٣
d1	6-2=4	7-3=4	٩-٠=٩
d2	6-6=0	7-1=6	9-9=0
d3	6-0=6	7-7=0	9-4=5

Maxi(d,Θ)

٩

٦

٦

٢ـ ثم نجد افضل قرار باستخدام معيار الحد الادنى للحد الاعلى كونه جدول خسارة

اذن افضل قرار حسب معيار الاسف هو اما d1 او d3

مثال ١١ لنفس مثال ١٠ اعتبر الجدول هو جدول منفعة : اوجد افضل قرار باستخدام معيار الاسف

الحل : نفس الخطوة الاولى نحوله الى معياري ثم نجد جدول الاسف ثم نجد افضل قرار باستخدام معيار الحد الاعلى للحد الادنى Maxmini كونه جدول منفعة

Minα(d,Θ) maxminiα(d,Θ)=4

d1 4

d2 0

اذن افضل قرار حسب هذا المعيار هو d1

المحاضرة الخامسة :

d3 0

مثال١٢ لدينا جدول المنفعة الاتي اوجد القرار الامثل حسب اسلوب تعشية القرارات

الحل نحوله الى معياري بالقسمة على ١٠٠ وطرح واحد يكون

	Ө١	Ө٢
d1	٦٠٠	١٠٠
d2	٢٠٠	٤٠٠

	Ө١	Ө٢
d1	٥	٠
d2	١	٣

نفرض ان p(d1)=p فان p(d2)=1-p

$E(U,\Theta1)=5p+(1-p)=1+4p.......(1)$

$E(U,\Theta2)=0p+3(1-p)=3-3p .....(2)$

$E(U,\Theta1)=E(U,\Theta2)$

$1+4p=3-3p$

$7p=2 \Longrightarrow p=2/7$

$1-p=5/7$

ويكون افضل قرار هو d2 لان احتماله اكبر والمنفعة المتوقعة

$$E(u,\Theta)=3-3(\frac{2}{7} \qquad =15/7 \text{ units}$$

مثال ١٣ لنفس مثال ١٢ اوجد افضل قرار باستخدام الرسم البياني

الحل بما ان $p(d1) = \frac{2}{7}$

$P(d2)= \frac{5}{7}$

والجدول هو منفعة لذا فان

افضل قرار هو d2 كونه يعظم الربح

لا تستخدم هذه الطريقة فقط في حالة كون الجدول من المرتبة 2X2 فقط

ملاحظة لوكان لدينا نفس الجدول مثال ١٣ ولكنه جدول خسارة فان افضل قرار هو d1 لأنه يقلل الخسارة

مثال ١٤ يوجد قرارات لطبيب يفترض اتخاذ القرار لاحدهما حول كمية الجرعة الواجب اعطائها لمريض لتبقيه على قيد الحياة (بالملغم) بغض النظر عن حالة المريض سواء أكانت سيئة ام جيدة

فإذا كانت دالة المنفعة d^2 $U(d,\Theta j)=\frac{3}{1000}$ ، $j=1,2$ اوجد افضل قرار باستخدام اسلوب تعشية القرارات الواجب اتخاذه علماً القراران هما $0<d1<20$ ، $20<d2<30$

القرارات الغير معتمدة Inadmissible Decision

تعريف (١) اا كان لدينا جدول منفعة وتحققت لدينا المتباينتين التاليتين

$$U(d1,\Theta j)\geq U(d^*,\Theta j) \qquad \Theta j=1,2,\ldots\ldots,n$$

$$U(d,\Theta j)\geq U(d^*,\Theta j) \text{ for some } j$$

فأن القرار d^* هو قرار لا يعتمد ويستبعد من الجدول

تعريف (٢) :اذا كان لدينا جدول الخسارة وتحقق لدينا المتباينتين التاليتين

$$L(d,\Theta j)\leq L(d^*,\Theta j) \qquad \forall j=1,2,\ldots..n$$

$$L(d,\Theta j)\leq L(d^*,\Theta j) \qquad \text{For some } j$$

فأن القرار d^* هو قرار لا يعتمد ويستبعد من الجدول

مثال ١ 5 لدينا جدول الخسارة التالي اوجد القرارات الغير معتمدة

	ϴ١	ϴ٢	ϴ٣	ϴ٤
d1	٢٠٠	٢٠٠	٥٠٠	٤٠٠
d2	١٥٠	٣٠٠	٥٠٠	٣٠٠
d3	١٠٠	٢٠٠	٤٠٠	٣٠٠
d4	٥٠	٣٠٠	٧٠٠	١٠٠

المحاضرة السادسة :

الفصل الثالث

نظرية بيز في اتخاذ القرار

لقد اعتمدنا في الفصول السابقة على طريقة متشائمة في اتخاذنا القرار حيث تصرفنا وكأن الخصم (الطبيعة) هي عدو لنا وتختار الحالة التي تعطينا اقل منفعة ممكنة وفق مبدأ اعلى اقل منفعة Maximin Utility او ادنى اعلى خسارة وفق مبدأ Minimax Loss .

ان هذا التصرف يكون منطقياً لو كنا بالفعل نجابه خصماً وليس الطبيعة وذلك لان الطبيعة لا تهتم بما نتخذه من قرار على سبيل المثال الطبيعة لا تجلب الغيوم وتجعل الجو ممطراً لأننا لم نحمل معنا المظلة الواقية من المطر. مع ذلك لو علمنا احتمال هطول المطر في ذلك اليوم لاتخذنا قراراً سليماً باصطحاب المظلة من عدمها.

على ما ذكر اعلاه يقودنا الى اسلوب جديد في اتخاذ القرار يتضمن دراسة احتمالات وقوع حالات الطبيعة مما يساعد في عملية اتخاذ القرار المناسب . ان هذا الاسلوب يأتي وفق نظرية بيز في اتخاذ القرار .

<u>الاحتمالات الاولية prior prob</u>

دراسة احتمالات حالات الطبيعة قبل الحصول على معلومات التجربة

الاحتمالات اللاحقة posterior prob

احتمالات حالات الطبيعة بعد استخدام قاعدة بيز العكسية لتعديل الاحتمالات الاولية بالاعتماد على معلومات المؤشر او المشاهدات على هذا الاساس في نظرية بيز لاتخاذ القرار يكون التوزيع الاحتمالي لحالات الطبيعة معلوماً او احتمالات حالات الطبيعة معكوسة ويمكن ان تقسم مسائل اتخاذ القرار في هذه المدرسة الى صنفين هما :-

الصنف الاول في مسائل اتخاذ القرار في هذا الصنف يكون التوزيع الاولي لحالات الطبيعة معلوماً او الاحتمالات الاولية لحالات الطبيعة .

الصنف الثاني في مسائل اتخاذ القرار في هذا الصنف يكون التوزيع اللاحق لحالات الطبيعة معلوماً او الاحتمالات اللاحقة لحالات الطبيعة معلومة مسائل اتخاذ القرار من الصنف الاول Non data Bayes method

في هذا الصنف من مسائل اتخاذ القرار يكون التوزيع الاولي لحالات الطبيعة معلوماً لذا باستخدام هذا التوزيع الاحتمالي نجد اولاً المنفعة المتوقعة وكما يلي :-

Edi U = $\sum_{j=1}^{n} U(di, \theta j)\, p(\theta j)$

اذا كانت دالة التوزيع لحالات الطبيعة متقطعة (غير مستمرة)

EdU = $\int_{\theta} U(d,\theta) f(\theta) d\theta$

عندما تكون دالة التوزيع الاحتمالي لحالات الطبيعة متصلة (مستمرة)

ان القرار الذي يقابل اكبر منفعة متوقعة يدعى قرار بيز بالاعتماد على التوزيع الاولي لحالة الطبيعة . وهذه الفائدة تدعى بفائدة بيز

فاذا رمزنا لمقدار بيز بالرمز d_B فان d_B هو القرار d $\breve{\Theta}_B$ بحيث ان

E_{dB} U = Max_d E_dU

اي ان قرار بيز هو القرار الذي يجعل المنفعة المتوقعة اعظم مايمكن اما اذا كانت لدينا دالة خسارة فأن مقدر بيز للمعلمة Ө هو ذلك المقدر الذي يجعل توقع دالة الخسارة في نهايتها الصغرى اي ان

E_{dB} L = min_d E_d L

حيث ان d_B يرمز لقرار بيز

مثال:- لنفرض ان لدينا جدول المنفعة المعيارية التالي

Ө٢	Ө١	
٣	٢	d1
٠	٦	d2

فأذا كان $P(\Theta1)=\frac{1}{3}$ اوجد قرار بيز وفائد بيز لهذه المسألة بالنسبة لهذا التوزيع الاولي لحالة الطبيعة

الحل :- بما ان $P(\Theta1)=\frac{1}{3}$ وان $P(\Theta1) + P(\Theta2) = 1$

فأن $P(\Theta2)=\frac{2}{3}$

لذا سنحسب الان المنفعة المتوقعة لكل قرار وهي على التوالي

Ed1U =2(1/3)+3(2/3)= 2(2/3)

Ed2U =6(1/3)+0(2/3)= 2

وبما ان Ed1U>Ed2U فأن قرار بيز هو d1 اما منفعة بيز فيها (٢/٣)٢ وحدة

اتخاذ القرار من الصنف الثاني طريقة بيز باستعمال التوزيع اللاحق ويسمى طريقة بيز القياسية

اذا كانت P(Ө) تمثل دالة التوزيع الاحتمالي الاولي لحالة الطبيعة f(X,Ө) يمثل التوزيع الشرطي ل X (المتغير العشوائي X يمثل المشاهدات او المؤشرات وهي معلومات عند حالة الطبيعة يتم الحصول عليها من التجربة).

فيمكننا استخدام قاعدة بيز العكسية من ايجاد الدالة F(Ө,X) التي تدعى دالة التوزيع الاحتمالي اللاحق لحالة الطبيعة F(Ө,X) (posterior distribution) وبالطبع فأن التوزيع اللاحق لحالة الطبيعة يكون افضل او اقرب الى الواقع من التوزيع الاولي لحالة الطبيعة وذلك بسبب وجود مشاهدات او مؤشرات حول حالة الطبيعة كما في المثال التالي

لنفرض لدينا صندوق يحتوي على ثلاث كرات (بيضاء ، سوداء ،زرقاء) فأن احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق هو $\frac{1}{3}$ ولكن ان سحبنا اولاً كرة وكانت مثلاً زرقاء فان احتمال سحب كرة بيضاء في هذه الحالة هو $\frac{1}{2}$

بأستخدام قاعدة بيز العكسية يمكن ايجاد التوزيع اللاحق لحالة الطبيعة حيث هناك اربعة حالات هي :-

١- $p(\theta j/xi)=\frac{P(xi/\theta j)p(\theta j)}{\sum_j p(xi/\theta j)p(\theta j)}$ اذا كان θx, متغيرين منفصلين

٢- $f(\theta j/x)=\frac{f(x/\theta)g(\theta)}{\int f(x/\theta)g(\theta)d\theta}$ اذا كان θx, متغيرين مستمرين

٣- $p(\theta j/x)=\frac{f(x/\theta j)P(\theta j)}{\sum_j f(xi/\theta j)p(\theta j)}$ اذا كان x مستمر θ, منفصل

٤- $f(\theta j/xi) = \frac{P(xi/\emptyset)g(\theta)}{\int p(xi/\theta)g(\theta)d\theta}$

اذا كان x منفصل , θ مستمر

بعد ايجاد التوزيع اللاحق نجد توقع دالة الخسارة اللاحقة او توقع دالة المنفعة اللاحقة وكما ياتي :-

- **اذا كان θ منفصل**

$$E_d(L/x) = \sum_j L(di,\theta)P(\theta j/\, xi)$$

$$E_d(U/x) = \sum_j U(di,\theta)P(\theta j/\, xi)$$

- اذا كان θ مستمر

$$E_d(L/x) = \int L(di,\theta)f(\theta j/xi)d\theta$$

$$E_d(U/x) = \int U(di,\theta)f(\theta j/xi)d\theta$$

ويكون مقدر بيز هو ذلك المقدر الذي يجعل توقع دالة الخسارة اللاحقة اصغر ما يمكن او يجعل دالة المنفعة اللاحقة اعظم ما يمكن أي ان :-

$$E_{d(x)}^{B}(L/x) = min_d E_d(L/x)$$

$$E_{d(x)}^{B}(U/x) = max_d E_d(U/x)$$

حيث ان $d_{(x)}^{B}$ يرمز لمقدر بيز القياسي واحيانا يرمز له $\hat{O}_{B(x)}$

المحاضرة السابعة مع الثامنة والتاسعة والعاشرة ..

اختبار الفرضيات Test of hypothesis

قلنا سابقاً ان الاحصاء يتألف من قسمين هما :-

١) الاحصاء الوصفي descriptive statistics
٢) الاحصاء الاستدلالي inferential statistics

ويقسم الاحصاء الاستدلالي الى قسمين هما :-

أ) التقدير Estimation
ب) اختبار الفرضيات Test of hypothesis

واختبار الفرضيات يكون على نوعين هما :-

١- اختبار الفرضية البسيطة simple Test of hypothesis
اي ان هناك قيمة مفترضة للمعلمة العشوائية المجهولة والمطلوب التحقق من صحتها بالتزامن والتوافق لامع قيمة اخرى بديلة لهذه المعلمة المجهولة

$H_o: \Theta = \Theta_o$

$H^1: \Theta \neq \Theta_o$

٢- اختبار الفرضية المركبة Composite testing hypothesis

وهو يتضمن تقدير فترة او مجال معين تنتمي اليه المحصلة العشوائية المجهولة . فأما ان تنتمي الى فترة معينة او لفترة بديلة اخرى مكملة لها بحيث ان اتحاد الفترتين هو المجموعة الشاملة وهي مجموعة الاعداد الحقيقية Real numbers (R) وبالطبع سيكون تقاطع الفترتين هي المجموعة الخالية empty set . هنا نحصل على التوزيع اللاحق Posterior Distribution للمعلمة العشوائية المجهولة .

حيث يكون التوزيع الاولي prior distribution للمعلمة Θ معلوماً وكذلك توزيع المشاهدات الشرطي conditional observables distribution

ومن هذين التوزيعين للمعلمتين نحصل على التوزيع اللاحق وبالطبع تكون هناك اما دالة خسارة Loss function او دالة منفعة Utlilty function .

وتكون فرضية العدم صحيحة اذا كانت الخسارة المتوقعة الناجمة عن اتخاذها اقل من الخسارة المتوقعة الناجمة عن اتخاذ الفرضية البديلة .

وسيكون العكس صحيح في حالة توفر دالة المنفعة حيث تكون المنفعة المتوقعة الناجمة عن اتخاذ فرضية العدم كقرار حول المعلمة المجهولة Θ اكبر من المنفعة المتوقعة الناتجة عن اتخاذ الفرضية البديلة كقرار حول هذه المعلمة .

مفهوم اختيار الفرضيات Concept of T. H.

قاعدة اتخاذ القرار

١- فرضية العدم Null Hypothesis

٢- الفرضية البديلة Alternative Hypothesis

اختبار الفرضية البسيطة :

لتكن لدينا الفرضية البسيطة الاتية $H_o:\Theta=\Theta_o$ Vs $H1:\Theta=\Theta1$

حيث ان H_o تسمى فرضية العدم والتي تقابلها بالضد الفرضية $H1$ التي تسمى الفرضية البديلة

نفرض ان المنفعة هي صفر عند رفض الفرضية من قبل متخذ القرار عندما تكون صحيحة وهذا يسمى بالخطأ من النوع الاول First Kind Error

وكذلك هي صفراً عندما يميل متخذ القرار بالفرضية وهي غير صحيحة وهذا يسمى بالخطأ من النوع الثاني Second Kind Error اما بالنسبة للمنفعة عند قبول الفرضية بشكل صحيح لتكن U_o والمنفعة عند رفض الفرضية بشكل صحيح $U1$ ويكون جدول المنفعة عندئذ هو الآتي :-

		$\Theta=\Theta_o$	$\Theta=\Theta١$
Accept H_o	d1	U_o	0
Reject H_o	d2	0	U1

فأذا كانت الاحتمالات الاولية للمعلمات معلومة وكذلك الاحتمالات الشرطية للمشاهد عندئذ يمكن الحصول على الاحتمالات اللاحقة حيث تكون المشاهد معطاة بعد ذالك نقوم بحساب النفعة المتوقعة لكل قرار وكما ياتي :-

$$E_{d1}(U/x) = U_{\circ}P(\Theta_{\circ}/x)$$

$$E_{d2}(U/x) = U_1 P(\Theta_1/x)$$

ولغرض الحصول على صيغة قبول فرضية العدم يجب ان يتوفق مایاتي:-

$$E_{d1}(U/x) > E_{d2}(U/x)$$

$$U_{\circ}P(\Theta_{\circ}/x) > U_1 P(\Theta_1/x)$$

$$\frac{P(\Theta_{\circ}/x)}{P(\Theta_1/x)} > \frac{U_{\circ}}{U_1}$$

ونفرض $K=\frac{U_{\circ}}{U_1}$

فان متخذ القرار يقبل فرضية العدم عندما يكون لدينا:-

$$\frac{P(\Theta_{\circ}/x)}{P(\Theta_1/x)} > K$$

وسوف يرفض متخذ القرار الفرضية $H_{\circ}$ ويقبل الفرضية البديلة عندما يتحقق مايلي :

$$\frac{P(\Theta_\circ/x)}{P(\Theta_1/x)} < \mathrm{K}$$

اما بالنسبة لحالة الخسارة فان ذلك يعني تساوي النفعة المتوقعة لكل قرار عندئذ لا توجد افضلية قرار على قرار.